

Unique Paper Code : 12271102 (0C)  
Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics I**  
Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics (CBCS Core)**  
Semester : **I**

**Duration: 3 Hours**  
**Maximum Marks:75**

Instructions for the candidates:

1. Answers may be written either in English or Hindi; but same medium should be used throughout the paper.
2. There are six questions in all. Attempt any four.
3. All parts of a question must be answered together.
4. All questions carry equal marks.
5. Use of simple calculator is allowed.

परीक्षार्थियों हेतु अनुदेश:

1. उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी में दिए जा सकते हैं परन्तु पूरे पेपर में एक ही माध्यम का उपयोग किया जाना चाहिए।
2. इस प्रश्न-पत्र में छः प्रश्न हैं। किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
3. एक प्रश्न के सभी भागों के उत्तर एक साथ दिए जाने चाहिए।
4. सभी प्रश्नों के बराबर अंक हैं।
5. साधारण कैलकुलेटर का प्रयोग मान्य है।

### QUESTION 1

A) Let  $f(x) = |2x - 6|$

- i) Graph  $f(x)$ .
- ii) Comment on the continuity and differentiability of the function
- iii) Does the inverse of  $f(x)$  exist?
- iv) Suppose the domain of the function is restricted.
  - a) Will  $f(x)$  have an inverse if  $x \in (-\infty, 3]$ ?
  - b) Will  $f(x)$  have an inverse if  $x \in [5, \infty)$ ?

B) Given  $f(x) = \sqrt{e^x + \sqrt{e^x + \sqrt{e^x + \dots}}}$

show that  $f'(x) = \frac{f^2(x) - f(x)}{2f(x) - 1}$ .

C) Given sets A, B, C, prove or disprove:  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

(12, 4, 2.75)

## QUESTION 2

A)

i) Find the Domain of the following functions:

a)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3x + 2}$

b)  $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2 - 4x}$

ii) Find the Range of the following functions:

a)  $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

b)  $k(x) = 4^x + 2^x + 4^{-x} + 2^{-x} + 3$

B) The value  $V(t)$  of crop increases over time according to the following function:

$$V(t) = 10e^{\sqrt{t}}$$

Assuming that there are no upkeep costs and the discount rate is 5% per annum, find optimal time  $t^*$  to cut the crop such that the present value is maximized.

C) Given  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ . Find  $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ .

D) Given  $f(x) = (x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3$ . What would be the number of real roots of the equation?

(9, 5, 2, 2.75)

## QUESTION 3

A) Consider a firm that has a cubic cost function:

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$$

Suppose it has positive fixed costs. Also, suppose that cost function is ever-increasing. In the beginning costs increase rapidly, but the rate of increase slows down as production equipment is used for a higher proportion of each working week. However, at high levels of production, costs again increase at a fast rate.

- (i) Find  $C'(Q)$  and  $C''(Q)$
- (ii) Using the answer in part (i) above, discuss the restrictions required on coefficients  $a, b, c$  and  $d$  for the cost function to exhibit the given behavior. Also discuss why the condition  $3ac > b^2$  needs to be met?

B) Given  $h(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ . Find maxima, minima and inflection points of the function, as applicable.

C) Prove the total expenditure method of measuring the price elasticity of demand, which says that if total expenditure on a good increase with a fall in price then price elasticity of demand is greater than unity and if total expenditure on a good decrease with a fall in price then price elasticity of demand is less than unity.

(8, 7, 3.75)

#### QUESTION 4

A) Given  $f(x) = |x - 5| + 2$ . Check whether  $f(x)$  is concave or convex?

B) Find out the region where the following function is increasing and where it is decreasing:

$$h(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$$

C) Find the asymptotes for  $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$

D) If  $100x$  percent, compounded annually and  $100y$  percent, compounded continuously are equivalent interest rates, show that  $y = \ln(1 + x)$ . illustrate graphically that  $y$  is always smaller than  $x$  but approximately equal to  $x$  when  $x$  is small.

(5, 5, 3, 5.75)

#### QUESTION 5

A) Determine the market price,  $P_t$  in any time period, the equilibrium price and the stability of time path:

$$Q_{dt} = 260 - 0.5P_t$$

$$Q_{st} = 20 + 0.3P_{t-1}$$

$$\text{Initial price, } P_0 = 250$$

B) Find the area of the region between the curve  $y = x^2 - 6x + 5$ ;  $0 \leq x \leq 7$  and the  $x$ -axis. Graph the curve showing the shaded region.

(9, 9.75)

## QUESTION 6

A) Solve the difference equation:

$$5x_t - 4x_{t-1} - 10 = 0 \quad ; x_0 = 15$$

- Find out the steady state.
- Check the answer using  $t = 0$  and  $t = 1$ .
- Sketch a graph of  $x_t$  and comment on the time path.

B) Suppose the marginal revenue of a good is given as:

$$MR = 55 - 4Q$$

Total Cost,  $TC$  is given as:

$$TC = 100 - 7Q + Q^2$$

- Find the total revenue function and the demand function,  $P(Q)$ .
- Find out the equilibrium quantity, price and profits of the firm.

(9, 9.75)

## QUESTION 1

A) मान लीजिए कि  $f(x) = |2x - 6|$

- $f(x)$  का आरेख बनाइए।
- इस फलन के सांतत्य व अवकलनीयता पर टिप्पणी कीजिए।
- क्या  $f(x)$  के प्रतिलोम फलन का अस्तित्व है?
- मान लीजिए कि फलन का परास सीमित है।
  - क्या फलन  $f(x)$  का एक प्रतिलोम फलन होगा यदि  $x \in (-\infty, 3]$ ?
  - क्या फलन  $f(x)$  का एक प्रतिलोम फलन होगा यदि  $x \in [5, \infty)$ ?

B) दिया हुआ है कि  $f(x) = \sqrt{e^x + \sqrt{e^x + \sqrt{e^x + \dots}}}$

$$\text{तो दर्शाइए कि } f'(x) = \frac{f^2(x) - f(x)}{2f(x) - 1}$$

C) तीन समुच्चय A, B, C दिए हुए हैं, तो सिद्ध कीजिए या खण्डन कीजिए कि:  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

(12, 4, 2.75)

## QUESTION 2

- A)
- निम्नलिखित फलनों के परास ज्ञात कीजिए:

- a)  $f(x) = \frac{2x}{x^2+3x+2}$   
 b)  $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-4x}$

ii) निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए:

- a)  $h(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$   
 b)  $k(x) = 4^x + 2^x + 4^{-x} + 2^{-x} + 3$

B) एक फसल का मूल्य  $V(t)$  समय के साथ निम्नलिखित फलन के अनुसार बढ़ता है:

$$V(t) = 10e^{\sqrt{t}}$$

यह मानते हुए कि इसकी कोई रखरखाव लागत नहीं है तथा बट्टे की दर 5% प्रति वर्ष है, फसल को काटने का इष्टतम समय  $t^*$  ज्ञात कीजिए जिस पर इसका वर्तमान रियायती मूल्य अधिकतम हो।

C) दिया हुआ है कि  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ , तो  $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  ज्ञात कीजिए।

D) दिया हुआ है कि  $f(x) = (x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3$ . इस समीकरण के वास्तविक मूलों की संख्या क्या होगी?

(9, 5, 2, 2.75)

### QUESTION 3

A) एक फलन पर विचार कीजिए जिसका घनात्मक लागत फलन निम्न प्रकार है:

$$C(Q) = aQ^3 + bQ^2 + cQ + d$$

मान लीजिए कि इसकी स्थिर लागत धनात्मक है। यह भी मान लीजिए कि यह फलन सदैव-वर्द्धमान है। प्रारम्भ में यह तेजी से बढ़ता है परन्तु जैसे-जैसे उत्पादन उपस्कर को कार्य-सप्ताह के उच्चतर अंश हेतु उपयोग किया जाता है, वैसे-वैसे लागत की वृद्धि दर धीमी होती जाती है। उत्पादन के उच्चतर स्तरों पर लागत पुनः तेजी से बढ़ती है।

(i)  $C'(Q)$  व  $C''(Q)$  को ज्ञात कीजिए।

(ii) भाग (i) के अपने उत्तर की सहायता से गुणांकों  $a, b, c$  व  $d$  हेतु उन सीमाओं/प्रतिबन्धों का विवेचन कीजिए जो कि फलन द्वारा ऊपर वर्णित व्यवहार प्रदर्शित करने हेतु आवश्यक हैं। यह भी विवेचन कीजिए कि शर्त  $3ac > b^2$  का सन्तुष्ट होना क्यों आवश्यक है?

B) दिया हुआ है कि  $h(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ . इस फलन के उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ व नति-परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए, जो भी लागू हों।

- C) मांग की कीमत लोच के मापन की कुल व्यय विधि को सिद्ध कीजिए जिसके अनुसार यदि वस्तु पर कुल व्यय कीमत में गिरावट के साथ बढ़ता है तो मांग की कीमत लोच इकाई से अधिक होती है तथा यदि वस्तु पर कुल व्यय कीमत में गिरावट के साथ कम होता है तो मांग की कीमत लोच इकाई से कम होती है।

(8, 7, 3.75)

#### QUESTION 4

- A) दिया हुआ है कि  $f(x) = |x - 5| + 2$ . जाँच कीजिए कि फलन  $f(x)$  अवतल है या उत्तल?  
 B) वह क्षेत्र ज्ञात कीजिए है निम्नलिखित फलन वर्द्धमान है तथा जहाँ यह हासमान है:

$$h(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}$$

- C)  $f(x) = \frac{1+x^2}{2x}$  हेतु अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।  
 D) यदि  $100x$  प्रतिशत, वार्षिक चक्रवृद्धि के साथ तथा  $100y$  प्रतिशत, सतत चक्रवृद्धि के साथ तुल्य ब्याज दरें हैं, तो दर्शाइए कि  $y = \ln(1 + x)$ . आरेख की सहायता से दर्शाइए कि  $y$  हमेशा  $x$  से छोटी होती है; परन्तु जब  $x$  छोटी होती है तो यह  $x$  के लगभग बराबर होती है।

(5, 5, 3, 5.75)

#### QUESTION 5

- A) निम्नलिखित हेतु किसी समयावधि में बाजार कीमत  $P_t$ , सन्तुलन कीमत तथा समय पथ का स्थायित्व ज्ञात कीजिए:

$$Q_{dt} = 260 - 0.5P_t$$

$$Q_{st} = 20 + 0.3P_{t-1}$$

$$\text{प्रारम्भिक कीमत, } P_0 = 250$$

- B) वक्र  $y = x^2 - 6x + 5$ ;  $0 \leq x \leq 7$  तथा  $x -$  अक्ष के मध्य स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। छायांकित क्षेत्र को दर्शाते हुए इस वक्र को आरेखित कीजिए।

(9, 9.75)

#### QUESTION 6

- A) निम्नलिखित अन्तर समीकरण को हल कीजिए:

$$5x_t - 4x_{t-1} - 10 = 0 \quad ; x_0 = 15$$

- i) स्थिर अवस्था को ज्ञात कीजिए।  
 ii)  $t = 0$  व  $t = 1$  की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिए।  
 iii)  $x_t$  का आरेख बनाइए तथा समय पथ पर टिप्पणी कीजिए।

- B) मान लीजिए कि एक वस्तु का सीमान्त राजस्व निम्नानुसार है:

$$MR = 55 - 4Q$$

कुल लागत निम्नानुसार है:

$$TC = 100 - 7Q + Q^2$$

- i) कुल राजस्व फलन तथा मांग फलन,  $P(Q)$  ज्ञात कीजिए।
- ii) फर्म की सन्तुलन मात्रा, कीमत व लाभ ज्ञात कीजिए।

(9, 9.75)